Beispielaufgaben zum Themenbereich Stochastik in den Abschlussarbeiten Mathematik ab 2025

September 2024

Vorbemerkungen:

Die hier veröffentlichten Aufgaben sollen die inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen, die in den Hinweisen zur Abschlussprüfung im Bereich der Stochastik genannt werden, mehrheitlich abbilden und beispielhafte Aufgabenformate aufzeigen.

Die Aufgabenbeispiele entsprechen weder hinsichtlich ihrer Bearbeitungsdauer noch bezüglich der Verteilung der Anforderungsbereiche auf die Teilaufgaben den Vorgaben für die Klausuren in den Abschlussprüfungen.
Aus diesem Grund werden auch weder Erwartungshorizonte mit Bewertungseinheiten angegeben noch Anforderungsbereiche zugeordnet, sondern nur die inhaltlichen Ansätze und Lösungen zu den Aufgaben ausformuliert.

Die vorliegenden Beispielaufgaben erheben ausdrücklich nicht den Anspruch auf Vollständigkeit in Bezug auf die Abbildung aller inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen, die im Teilgebiet Stochastik im Rahmen der Abschlussprüfung thematisiert werden können.

Beispielaufgabe Beschreibende Statistik: Kinobesuche

In einer Schulklasse haben die Jugendlichen die Anzahl ihrer Kinobesuche im letzten Monat gezählt. Die Ergebnisse wurden getrennt ausgewertet.

Abbildung 1:
Ergebnis der Mädchen

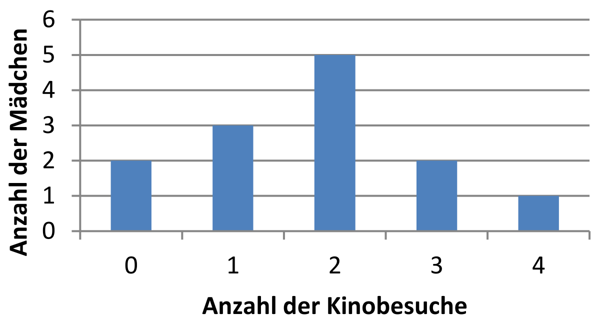


Abbildung 2:
Ergebnis der übrigen Jugendlichen

Anzahl der Kinobesuche	relative Häufigkeit
0	0,2
1	0,3
2	0,3
3	0,1
4	0,1

a.) Geben Sie die Anzahl der Mädchen an, die 2 oder 3 mal im Kino waren.

b.) In der Klasse befinden sich außer den Mädchen 20 weitere Jugendliche. Stellen Sie die Ergebnisse der übrigen Jugendlichen ebenfalls in einem Säulendiagramm mit absoluten Häufigkeiten (wie in Abbildung 1) dar.

c.) Die Häufigkeit der Kinobesuche wird in Kategorien „selten“ (0 bis 1 Kinobesuche), „normal“ (2 bis 3 Kinobesuche) und „häufig“ (4 und mehr Kinobesuche) eingeteilt. Zeichnen Sie für die Mädchen ein Kreisdiagramm entsprechend der genannten Kategorien.

d.) Berechnen Sie, welche der beiden Gruppen in diesem Monat durchschnittlich häufiger im Kino war.

e.) Vergleichen Sie die Anzahl der Kinobesuche für beide Gruppen mithilfe des jeweiligen Medians.[1]

f.) Mara hat vergessen, dass sie doch genau einmal statt keinmal im Kino war. Erläutern Sie die Auswirkung dieser Änderung auf den Median der Daten bei den Mädchen.

g.) Sara hat ihre Kinobesuche in den letzten fünf Monaten gezählt.
Im Durchschnitt hat Sara 2,4 Kinobesuche pro Monat gemacht.
Ermitteln Sie die fehlende Anzahl an Kinobesuchen im vierten Monat.

Monat	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Kinobesuche	**3**	2	3		1

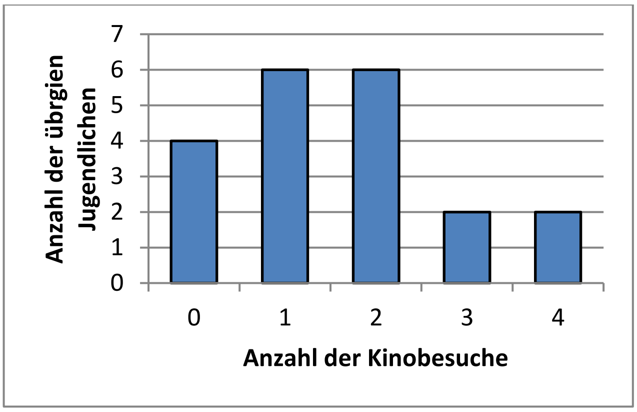
[1] Sollten Sie die absoluten Anzahlen der übrigen Jugendlichen nicht ermittelt haben, so verwenden sie nur in dem Fall die folgenden absoluten Häufigkeiten:

Anzahl der Kinobesuche	0	1	2	3	4
absolute Häufigkeit	1	6	3	5	5

Erwartete Lösung:

a.) Fünf Mädchen haben zwei Kinobesuche, zwei Mädchen haben drei Kinobesuche durchgeführt.
Es sind also insgesamt sieben Mädchen, die zwei- oder dreimal im Kino waren.

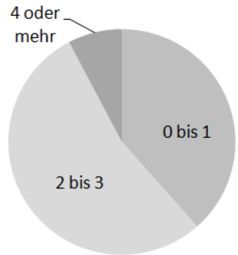
b.)



c.) Zum Berechnen der Winkel muss man den Anteil der 13 Mädchen an der jeweiligen Kategorie berechnen und diesem mit 360° multiplizieren.
Es ergeben sich folgende Winkel:

- Kategorie 0-1: $\frac{5}{13} \cdot 360° \approx 138°$
- Kategorie 2-3: $\frac{7}{13} \cdot 360° \approx 194°$
- Kategorie 4 und mehr: $\frac{1}{13} \cdot 360° \approx 28°$

Damit erhält man das nebenstehende Kreisdiagramm.



d.) Arithmetisches Mittel der Mädchen:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{13} \approx 1{,}8 \text{ [Besuche im Monat]}$$

Arithmetisches Mittel der übrigen Jugendlichen:

$$\bar{x} = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}1 = 1{,}6 \text{ [Besuche im Monat]}$$

Die Mädchen waren durchschnittlich häufiger im Kino als die übrigen Jugendlichen.

e.) Erstellen der geordneten Listen für die beiden Gruppen und Ermitteln des Medians.

Mädchen: 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4 Median: 2

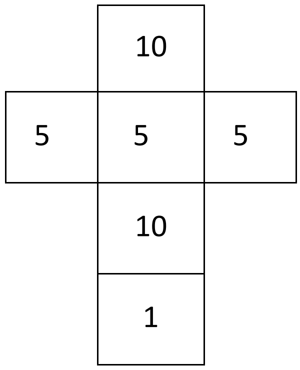
übrige Jugendliche: 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4 Median: $\frac{1+2}{2} = 1{,}5$

Mindestens 50% der Mädchen gehen 2 mal oder häufiger pro Monat ins Kino, bei den übrigen Jugendlichen gehen 50% höchstens einmal ins Kino.

f.) Der Median wird durch die Veränderung nicht beeinflusst, da sich der veränderte Wert weiterhin kleiner als der Median ist.

g.) Die Gleichung $\frac{3+2+3+x+1}{5} = \frac{9+x}{5} = 2{,}4$ ergibt $x = 3$.
Im vierten Monat ist Sara dreimal ins Kino gegangen.

Beispielaufgabe Modellierung von zweistufigen Zufallsexperimenten



In der Abbildung ist das Netz eines idealen Spielwürfels abgebildet.

a.) Erläutern Sie, dass die Wahrscheinlichkeit beim einmaligen Werfen des Würfels eine „5“ zu würfeln, genau 50% beträgt.

Der Würfel wird im Folgenden zweimal geworfen.

b.) Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm mit allen Wahrscheinlichkeiten.

c.) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gleiche Zahlen gewürfelt werden.

d.) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler in zwei Würfen keine „5“ würfelt.

e.) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler keinen Zehnerpasch („zweimal zehn“) würfelt.

Es wird nun die Augensumme aus den beiden Würfen gebildet.

f.) Geben Sie alle möglichen Ergebnisse dieses Zufallsexperiments an.

g.) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eine „2“ zu würfeln.

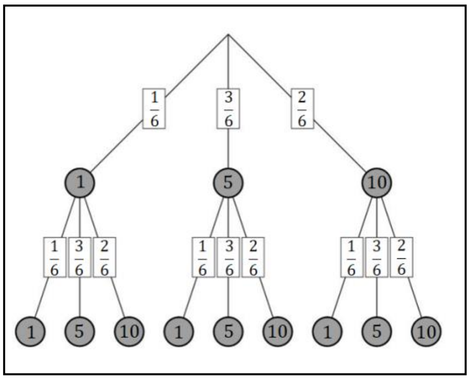
h.) Beurteilen Sie, ob es wahrscheinlicher ist eine „11“ oder eine „20“ zu werfen.

i.) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Werfen einer Augensumme, die kleiner als 10 ist.

j.) Geben Sie ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit größer als 50% ist.

Erwartete Lösung

a.) Da bei einem idealen Würfel jede Seite mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt und drei der sechs Würfelseiten mit „5“ beschriftet sind, ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \ \widehat{=}\ 50\%$.



b.) Baumdiagramm siehe rechts

c.) E: „Es werden zwei gleiche Zahlen gewürfelt“

$$P(E) = P(1|1) + P(5|5) + P(10|10)$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{9}{36} + \frac{4}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} \approx 0{,}389$$

d.) E: „Es wird keine 5 gewürfelt.“

$$P(E) = P(1|1) + P(1|10) + P(10|1) + P(10|10)$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{4}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$
$$= 0{,}25$$

oder mit der Komplementärregel $P(E) = 1 - P(\bar{E})$

e.) E: „Es wird kein 10er Pasch geworfen“

Mit der Komplementärregel ergibt sich: $P(E) = 1 - P(10|10) = 1 - \frac{4}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9} \approx 0{,}889$

f.) Die möglichen Ergebnisse der Augensumme lauten 2, 6, 10, 11, 15, 20

g.) E: „Die Augensumme beträgt 2.“

$$P(E) = P(1|1) = \frac{1}{36} \approx 0{,}03$$

h.) E_1: „Die Augensumme beträgt 11.“

$$P(E_1) = P(1|10) + P(10|1) = \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$$

E_2: „Die Augensumme beträgt 20.“

$$P(E_2) = P(10|10) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$$

Nein, die Wahrscheinlichkeit für die beiden Ereignisse ist gleich groß.

i.) E: „Die Augensumme ist geringer als 10.“ bzw. „Die Augensumme beträgt 2 oder 6.“

$$P(E) = P("2") + P("6") = P(1|1) + P(1|5) + P(5|1) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{3}{36} = \frac{7}{36} \approx 0{,}194$$

j.) Man kumuliert die Wahrscheinlichkeiten der Augensummen bis diese über 50 % steigt.

- Eine Lösung dafür lautet: $P("2") + P("6") + P("10") + P("11") \geq 50\ \%$
  Das Ereignis dazu lautet: Man wirft eine Augensumme, die kleiner oder gleich 11 ist.“
- alternativ: $P("5") > 50\ \%$, also E: „Man würfelt mindestens eine 5“.

Beispielaufgabe Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Vierfeldertafeln

Das Transportunternehmen *Alldays* ist für den Transport von Paketen zwischen verschiedenen Logistikzentren zuständig.
Dabei kommen jeden Monat ca. 3200 Pakete beschädigt oder im falschen Logistikzentrum an. Das sind $\frac{4}{100}$ aller transportierten Pakete.
Von allen Paketen kommen 1,5 % beschädigt an, 3 % erreichen ein falsches Logistikzentrum.

a) Berechnen Sie, wie viele Pakete monatlich transportiert werden
[Kontrollergebnis 80.000 Pakete].

b) Ergänzen Sie die Vierfeldertafel und das Baumdiagramm zu diesem Sachkontext:

	richtig zugestellt (r)	**falsch zugestellt (f)**	**gesamt**
unbeschädigt (u)			
beschädigt (b)		**400**	
gesamt			

c) Interpretieren Sie die in der Vierfeldertafel bereits eingetragene Zahl.

d) Erstellen Sie beide möglichen Baumdiagramme mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten und geben Sie die Wahrscheinlichkeit mit vier Stellen hinter dem Komma für folgende Ereignisse an:
   (1) Ein Paket kommt unbeschädigt an.
   (2) Ein Paket; das unbeschädigt ist, kommt im falschen Logistikzentrum an.
   (3) Ein Paket, das im richtigen Logistikzentrum ankommt, ist beschädigt.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Paket beschädigt ist und im falschen Logistikzentrum ankommt.

f) Maja hat drei Pakete bestellt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Pakete unbeschädigt im richtigen Logistikzentrum ankommen.

Falls Sie b) nicht lösen konnten, verwenden Sie für die weiteren Aufgaben alternativ folgende Vierfeldertafel:

	richtig zugestellt (r)	**falsch zugestellt (f)**	**gesamt**
unbeschädigt (u)	76 600	1 800	78 400
beschädigt (b)	1 200	**400**	1 600
gesamt	77 800	2 200	80 000

Erwartete Lösung

a) $3200 \cdot \frac{100}{4} = 80.000;$
80.000 Pakete werden insgesamt transportiert.

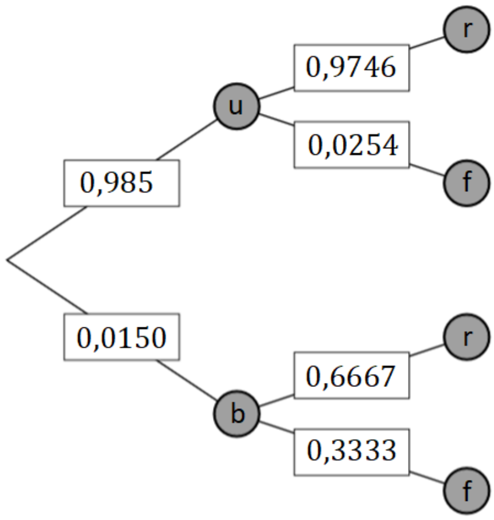
b)

	richtig zugestellt (r)	falsch zugestellt (f)	gesamt
unbeschädigt (u)	76 800	2 000	78 800
beschädigt (b)	800	**400**	1 200
gesamt	77 600	2 400	80 000

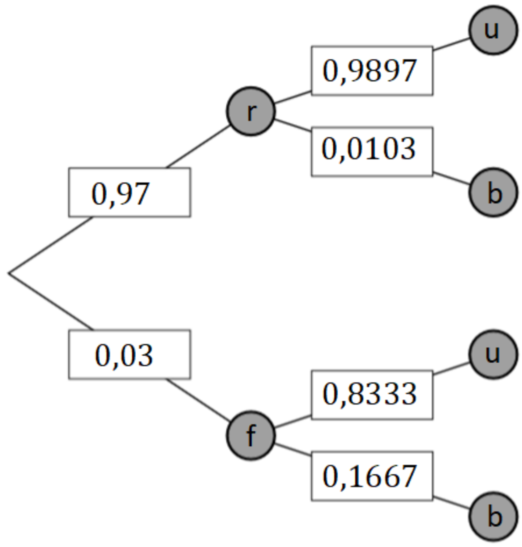
c) 400 Pakete werden falsch zugestellt und sind beschädigt.

d) Baumdiagramme

Baumdiagramm A:



Baumdiagramm B:



Es ergeben sich die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
(1) $P(u) = 98{,}5\ \%$
(2) $P_u(f) = 2{,}54\ \%$
(3) $P_r(b) = 1{,}03\ \%$

e) $P(b \cap f) = 0{,}015 \cdot 0{,}3333 \approx 0{,}005 = 0{,}5\ \%$
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Paket beschädigt ist und falsch zugestellt wird, beträgt 0,5%.

f) $P(u \cap r) = \frac{76800}{80000} = 0{,}96 = 96\%;\ \ 0{,}96^3 \approx 0{,}8847 = 88{,}47\%.$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 88,47% werden alle drei Pakete unbeschädigt und richtig zugestellt.

<u>Beispielaufgabe Kombinatorik</u>

Zwölf Jugendliche betreten nach den Ferien den neuen Klassenraum.

a) Sie finden 12 freie Sitzplätze vor.
Berechnen Sie, wie viele verschiedene Sitzordnungen möglich sind.

b) Berechnen Sie, wie viele Jahre es dauern würde, alle diese Sitzordnungen durchzuprobieren, wenn man pro Sekunde eine Sitzordnung schaffen würde.
[Ersatzergebnis: Wenn Sie a) nicht gelöst haben, wandeln Sie $5{,}12 \cdot 10^8$ Sekunden in Jahre um.]

c) In einem Unterrichtsgespräch wird unter den zwölf Jugendlichen eine Person für die Gesprächsleitung und eine weitere Person für die Protokollführung benötigt.
Berechnen Sie die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten diese Aufgaben unter den Jugendlichen zu verteilen.

d) Anstatt Gesprächsleitung und Protokollführung zu bestimmen, werden die Posten ausgelost. Da ein Jugendlicher auch beide Posten gleichzeitig übernehmen kann, wird der im ersten Durchgang gezogenen Zettel nun wieder zurückgelegt.
Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten die Posten zu besetzen.

e) Als gleichberechtigte Klassensprecher werden zwei Personen gewählt.
Berechnen Sie, wie viele Möglichkeiten es für die Besetzung dieses Teams gibt.
Erläutern Sie, weshalb es in der Anzahl der Möglichkeiten in dieser Situation einen Unterschied zu Aufgabenteil c) gibt.

Erwartete Lösung

a) Für den ersten Platz gibt es 12 Möglichkeiten, für den zweiten Platz 11 Möglichkeiten, usw.
Es gibt also $12! = 479.001.600$ mögliche, verschiedene Sitzordnungen.

b) $\frac{479.001.600}{60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365} \approx 15{,}2\ [a]$
Man würde etwa 15,2 Jahre benötigen.

c) Es gibt 12 Möglichkeiten, den Gesprächsführer auszuwählen, anschließend nur noch 11 für den Protokollanten, also $12 \cdot 11 = 132$ Möglichkeiten.

d) Es handelt sich um ein Ziehen mit Zurücklegen, d.h. beim ersten Zug liegen 12 Möglichkeiten vor, beim zweiten Zug hat man ebenfalls 12 Möglichkeiten, d.h. insgesamt gibt es $12^2 = 144$ Möglichkeiten.

e) Es werden zwei Jugendliche aus einer Gruppe von 12 Jugendlichen ausgewählt.
Es sind insgesamt $\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = \frac{132}{2} = 66$ Möglichkeiten.
Da die beiden Klassensprecherposten gleichberechtigt sind, spielt in Aufgabenteil e) die Reihenfolge bei der Auswahl keine Rolle.
Die beiden Ergebnisse aus Aufgabenteil c) „A wird Gesprächsleiter und B Protokollant“ und „A wird Protokollant und B wird Gesprächsleiter“ werden zu einem Ergebnis „A und B werden Klassensprecher“ zusammengefasst.
Daher muss die Anzahl der Möglichkeiten aus Aufgabenteil c) nun durch zwei dividiert werden.